"El saber de mis hijos hará mi grandeza"

Universidad de Sonora
Departamento de Matemáticas

MCD

MAESTRÍA EN CIENCIA DE DATOS
ÁLGEBRA LINEAL Y OPTIMIZACIÓN
2023

____
Nombre completo

Duración: 50 minutos.
Instrucciones: Resuelva los siguientes ejercicios, de manera clara y ordenada. Justifique cada una de sus respuestas. Para acreditar este examen es necesario resolver correctamente al menos cuatro ejercicios de la parte de álgebra lineal y dos ejercicios de la parte de optimización.

ÁLGEBRA LINEAL

1. Considere los siguientes vectores en $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(a) Verifique si los vectores son linealmente independientes. En caso de serlo, encuentre una combinación lineal de los vectores que sea igual al vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) Si los vectores no son linealmente independientes, encuentre una combinación lineal de los vectores que sea igual al vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

2. Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ las siguientes matrices:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ y verifique que es una matriz cuadrada simétrica.
(b) Calcule $\mathbf{AB}$ y verifique que es una matriz diagonalizable.

3. Sean $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$. Calcule el producto punto entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ y encuentre un vector ortogonal a ambos.

4. Considere la siguiente matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

(a) Escriba el sistema de ecuaciones lineales asociado a la matriz $\mathbf{A}$, tomando un vector arbitrario $\mathbf{b} = [b_1\ b_2\ b_3]^T$ para los términos libres del sistema.
(b) Encuentre la forma escalonada reducida de $\mathbf{A}$ mediante el método de eliminación de Gauss-Jordan.
(c) En términos del vector $\mathbf{b}$, determine las condiciones para las cuáles el conjunto solución del sistema de ecuaciones lineales $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ es vacío, unitario o infinito.

5. Considere una matriz simétrica $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$ y dos vectores propios asociados a valores propios distintos, $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Demuestre que los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son ortogonales.

6. Sea $\mathbf{A}$ una matriz simétrica y definida positiva de tamaño $n \times n$. Demuestre que todos los autovalores de $\mathbf{A}$ son positivos.

7. Considere la siguiente matriz $\mathbf{A}$ de tamaño 2×2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Encuentre los autovalores y autovectores de $\mathbf{A}$.
(b) Diagonalice la matriz $\mathbf{A}$ mediante una matriz diagonalizadora $\mathbf{P}$.

8. Sea $\mathbf{A}$ una matriz diagonalizable de tamaño $n \times n$ y λ un autovalor de $\mathbf{A}$ con autovector asociado $\mathbf{v}$. Demuestre que λ^2 es un autovalor de $\mathbf{A}^2$ y encuentre un autovector asociado a λ^2.

OPTIMIZACIÓN

9. Sea la sucesión de números reales (a_n) definida por $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

   a) Determine si la sucesión está acotada.

   b) Pruebe que la sucesión es convergente y encuentre su límite.

10. Sea el campo escalar $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ definido en el conjunto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Encuentre los conjuntos $\arg\min_{(x,y)\in D} f(x, y)$ y $\arg\max_{(x,y)\in D} f(x, y)$.

11. Considere el campo escalar $g(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

    a) Calcule la derivada direccional de g en el punto $(2, -1)$ en la dirección del vector $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

    b) Interprete geométricamente el valor obtenido.

12. Sea el campo escalar $f(x, y) = x^4 - 32x^2 + y^4 - 18y^2$.

    a) Calcule la matriz hessiana de f.

    b) Determine los puntos críticos, máximos locales, mínimos locales y puntos silla de h utilizando la matriz hessiana.